Муниципальный этап областной олимпиады школьников

по математике

2018-2019 учебный год

11 класс

Решения и оценивание

1. Сколько существует пятизначных чисел, сумма цифр которых делится на 5?

Ответ: 18000

Решение. На первом месте можно поставить любую из 9 цифр. На следующих трех местах – любую из 10 цифр. А на последнем, для обеспечения делимости суммы цифр на 5, остается (всегда!) только 2 варианта: если сумма первых четырех делилась на 5, то пятой цифрой может быть 0 или 5; если сумма первых четырех цифр при делении на 5 дает остаток 1, то пятой цифрой может быть 4 или 9, и т.д.. Поэтому таких чисел $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 18000$.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов. За арифметические ошибки (при любом правильно организованном подсчете) – снимать по баллу за ошибку.

2. В школе проводятся выборы «Мисс школы», по следующим правилам: все мальчики, участвующие в выборах (каждый имеет ровно один голос), разбиваются на группы (не менее 10 и не более 20 человек в группе); в каждой группе побеждает претендентка, набравшая наибольшее число голосов. Побеждает в конкурсе претендентка, победившая в большем количестве групп (при равенстве, всегда, победитель определяется жребием). Хакер Вася, взломав переписку всех голосующих, выяснил, кто за кого будет голосовать. Оказалось, что за Васину подругу Тамару проголосуют четверо (сам Вася, и трое его друзей), а каждая из девяти остальных претенденток получит 22 голоса. Вася не может повлиять на волеизъявление голосующих, но, используя свои хакерские способности, может организовать разбиение голосующих на группы (и состав групп) по своему усмотрению. Может ли Вася устроить гарантированную победу Тамаре?

Ответ: Может.

Решение. Можно организовать две супергруппы, в каждую из которых будут включены 2 голоса за Тамару и по одному голосу за каждую из прочих претенденток. В каждую из остальных 9 групп соберем всех голосующих за одну из претенденток (эти группы будут состоять из 20 человек). Тамара победит в двух группах, а каждая из остальных претенденток – в одной. Тамара – выиграла!

Оценивание. Полное решение – 7 баллов. За правильный ответ без обоснования – 0 баллов.

3. Барон Мюнхаузен утверждает, что существует волшебное натуральное число μ, что для всех натуральных n, число $2^{\mu} \cdot n!$

делится на 2^n. Прав ли барон? (n! – это произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно).

Ответ: нет.

Решение. В разложении на множители числа m! при $m = 2^k$двойку дают четные числа (их среди чисел от 1 до m ровно $\frac{m}{2}$=2^{k-1} штук. Однако, числа, кратные 4 (их $\frac{m}{4}$=2^{k-2} штук), дают еще одну дополнительную двойку, числа, кратные 8 – еще одну, и т.д. . Таким образом, в разложении на множители числа m! двойка встретится ровно $2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2^1 + 1 = 2^k - 1 = m - 1$ раз. Поэтому, в разложении на множители числа n! для $n = m - 1$ двоек будет на k штук меньше (т.о. их будет ровно $n - k$). Поэтому, волшебное число должно быть не менее k, для любого k. Но это невозможно.

Оценивание: Полное решение – 7 баллов. За правильный ответ без обоснования – 0 баллов.

4. В неравнобедренной трапеции середина основания равноудалена от трех других сторон трапеции. Докажите, что длина этого основания равна сумме длин боковых сторон трапеции.

Решение. Построим окружность с центром в середине основания, касающуюся трех других сторон (по условию, это возможно). Продолжения боковых сторон трапеции, второе основание, и касательная к окружности, параллельная основаниям, образуют трапецию. Эта трапеция – описанная, так что сумма ее боковых сторон равна сумме ее оснований. Её средняя линия (она совпадает с основанием исходной трапеции) равна полусумме ее оснований. Но боковые стороны большой трапеции в два раза больше боковых сторон исходной. Это дает требуемое равенство.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов.

5. Сумма трех чисел равна 7, а произведение всех трех чисел в 7 раз больше суммы попарных произведений этих чисел. Найдите сумму кубов этих трех чисел.

Ответ: 343.

Решение-1. По условию, $a + b + c = 7$, $abc = 7(ab + bc + ac)$. Отсюда $abc = (a + b + c)(ab + bc + ac)$, но тогда $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + 3abc = 0$. Разлагая левую часть на множители, получим $(a + b)(a + c)(b + c) = 0$. Значит, из наших трех чисел пара чисел в сумме дает нуль (и тогда третье число равно 7). Но тогда и в сумме кубов, пара кубов аннулируется, а третий дает $7^3 = 343$.

Решение-2. Рассмотрим произведение $(x - a)(x - b)(x - c)$. Раскрывая скобки, видим, что это произведение равно $x^3 - 7x^2 + Kx - 7K$, где $K = ab + bc + ac$. Этот кубический многочлен равен $(x^2 + K)(x - 7)$. Поскольку числа a, b, c - его корни, то одно из этих чисел равно 7, а два других отличаются только знаком. Это приводит к ответу.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов. За правильный ответ (полученный на ряде примеров) – 1 балл. За правильное утверждение (недоказанное), что все такие тройки имеют вид, указанный выше – добавить еще 1 балл.