

**Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
по математике
2022-2023 учебный год
5 класс**

Максимальный балл – 35

Ответы и решения

1) Сумма 2022 натуральных чисел равна 2022. На сколько изменится значение суммы, если одно из слагаемых увеличить в 2022 раза?

Ответ: 4043

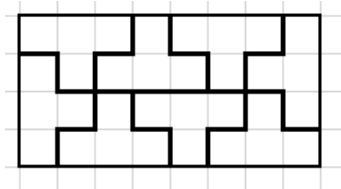
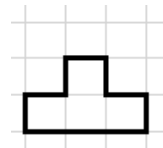
Решение: так как каждое натуральное число не меньше единицы, то такая сумма может быть получена только в результате сложения 2022 единиц. Если одну из них заменить на 2022, то сумма увеличится на 2021 и составит $2022 + 2021 = 4043$.

Критерии: полное решение 7 баллов. Арифметическая ошибка – минус 2 балла, отсутствие хоть какого-то обоснования, что все числа равны одному – минус 2 балла.

2) Можно ли разрезать клетчатый прямоугольник 4×8 на Т-образные фигурки из четырех клеток (см. рисунок).

Ответ: да, можно.

Решение:



Критерии: полное решение 7 баллов

3) Шестиклассников спросили о том, кто из них решил логическую задачу на олимпиаде.

Аня сказала: задачу решили Боря, Валя и Гриша.

Боря сказал: задачу не решили Аня, Валя и Гриша.

Валя: Аня и Боря солгали.

Гриша: Аня, Боря и Валя сказали правду.

Сколько ребят солгали?

Ответ: трое.

Решение. Аня и Боря противоречат друг другу, значит не могут оба говорить правду. Если они солгали оба, то Гриша тоже солгал, а Валя сказала правду. Если из Ани и Бори один человек сказал правду, а второй солгал, то Валя и Гриша солгали. В любом случае один сказал правду, а трое солгали

Критерии. Полное решение 7 баллов.

4) Найди все решения ребуса: $I \times X = C \times E \times M \times B$. Решения, отличающиеся только перестановкой множителей в пределах одной и той же части равенства, будем считать одним и тем же решением.

Ответ: $8 \cdot 9 = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$ или $4 \cdot 9 = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6$.

Решение: заметим, что букв семь и они все разные. Следовательно, в этой записи не может быть цифр 0, 5 и 7. Произведение оставшихся семи цифр (а значит произведение левой и правой части исходного равенства) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 = 2^7 \cdot 3^4$. Из этих семи цифр нужно убрать одну. При этом произведение левой и правой части равенства должно быть полным квадратом, а следовательно, в разложении этого произведения на простые множители все показатели степеней должны быть чётными. Таким образом убрать можно только цифры 2 или 8.

Если убрать 2, то произведение оставшихся будет $2^6 \cdot 3^4$, а значит каждая сторона будет равна $2^3 \cdot 3^2$. Тогда 9 обязательно с одной стороны, а 3 и 6 с другой, а 8 нельзя ставить с той же стороны, где 6. Тогда единственный вариант $8 \cdot 9 = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$.

Если убрать 8, то произведение оставшихся будет $2^4 \cdot 3^4$, а значит каждая сторона будет равна $2^2 \cdot 3^2$. Тогда 9 обязательно с одной стороны, а 3 и 6 с другой. Тогда единственный вариант $4 \cdot 9 = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6$.

Критерии: приведен один из вариантов и больше ничего – 3 балла. Приведено 2 варианта – 4 балла. Полное решение – 7 баллов.

5) Петя в своей тетради написал 99 чисел, таких что: в каждом из них не менее четырех цифр; среди них нет двух одинаковых; сумма этих чисел равна 998877. Вася к каждому из этих 99 чисел прибавил число, образованное последними тремя цифрами в том же порядке и записал получившиеся 99 чисел к себе в тетрадь. Например, если у Пети написано число 23 135, то Вася прибавит к нему 135 и, соответственно, напишет число 23 270, из Петиного числа 13 022 получится число 13 044, а 13 000 так и останется 13 000. Затем Толя одно за другим переписал числа из Васиной тетради в свою, причем если какое-то число в Васиной тетради встречается более одного раза – Толя пишет это число только один раз. Какое наименьшее количество чисел мог написать Толя?

Ответ: 50

Решение: представим каждое Петино число в виде $1000A+B$, где числа A и B не более чем трёхзначные. Одно и то же Васиное число могло получиться только из двух Петиных: значения B должны отличаться ровно на 500, при этом у числа, у которого B меньше, A должно быть на единицу больше. Следовательно, количество чисел не могло уменьшиться более чем вдвое, а значит не могло стать меньше 50. Пример Петиных чисел на 50: 2 000 и 1 500, 2 001 и 1 501, 2 048, 1 548. 99 число равно разности между 998877 и суммой первых 98, эта сумма, очевидно меньше $4000 \cdot 50 = 200\,000$, следовательно, полученное таким образом 99 число не совпадёт ни с каким из предыдущих даст пятидесятое Толино число.

Критерии : полное решение 7 баллов.